Prueba

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**20 ptos.**] Sea el número complejo $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

   a) (**10 ptos.**) Exprese z en su forma polar.

   b) (**10 ptos.**) Verifique que z satisface la ecuación $\dfrac{3}{z+1} - \dfrac{1}{z} = 1$.

2) [**20 ptos.**] Dados los siguientes items.

a) (**10 ptos.**) Sea $p(x) = ax^4 + bx^3 + 6x^2 - 12x + 4$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{Z}$ de modo que el resto de la división de $p(x)$ por $x^2 - 1$ sea $2x + 1$.

b) (**10 ptos.**) Descomponga en fracciones parciales la siguiente expresión, dada por:

$$\frac{2x+3}{x^2+x-6}$$

3) [**20 ptos.**] Dados los siguientes items.

a) (**10 ptos.**)Dada la parábola de ecuación $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$. Hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de su directriz.

b) (**10 ptos.**)Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en $(-4, 1)$, un vértice en $(2, 1)$ y semieje imaginario igual a 4.

PAUTA

1) a) $|z| = 1$ 3 pts, $\theta = \frac{5\pi}{3}$, 3 pts entonces $z = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{5\pi}{3})$. 4 pts

b)

$$\frac{3}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\frac{1-i\sqrt{3}+2}{2}} - \frac{2}{1-i\sqrt{3}} \text{ 2pts} = \frac{6}{3-i\sqrt{3}} - \frac{2}{1-i\sqrt{3}} \text{ 2pts}$$

$$= \frac{6}{3-i\sqrt{3}} \cdot \frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} - \frac{2}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \text{ 2pts} = \frac{6(3+i\sqrt{3})}{12} - \frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} \text{ 2pts}$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \; 2pts = \frac{2}{2} = 1$$

2) a) Sea el resto $r(x) = 2x+1$, por el teorema del resto se tiene que: $p(1) = r(1)$ 2 pts y $p(-1) = r(-1)$ 2 pts, de donde se obtiene que: $a+b-5=0$ y $a-b+22=0$ 4 pts. Resolviendo el sitema se obtiene que $a=-9$ 1 pto y $b=14$. 1 pto

b)

$$\frac{2x+3}{x^2+x-6} = \frac{2x+3}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} \text{ 4pts}$$

$$2x+3 = (A+B)x + (-2A+3B) \text{ 4pts}$$

Resolviendo, se obtiene: $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{7}{5}$. 2 pts

3) a) Sumando y restando términos adecuados, para completar un cuadrado $y^2+8y+16-6x-4+16-6x+12$ o bien $(y+4)^2 = 6(x+2)$. 2 pts El vértice es el punto $(-2,-4)$. 2 pts Como $4a=6$ 2 pts, $a=\frac{3}{2}$. 2 pts Luego el foco es el punto de coordenadas $(-\frac{1}{2},-4)$ 2 pts y la ecuación de la directriz es $x=-\frac{7}{2}$ 2 pts.

b) La distancia entre el centro y el vértice es 6; luego $a=6$ 3 pts. El semieje imaginario es 4; luego $b=4$ 3 pts. Ahora sustituyendo en la ecuación de la hiperbola, obtenemos:
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \implies \frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 4 pts